Lógica proposicional

Lecturas:

• Capítulo 1 de Rosen

Bibliografía adicional

• Capítulos13,14 de Nilsson
• Capítulo 7 de Russell + Norvig
• Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid Douglas R. Hofstadter
• A. Deaño “Introducción a la Lógica Formal”,
• E. Paniagua Arís, J. L. Sánchez González, F. Martín Rubio, “Lógica computacional”, Thomson
• Melvin Fitting “First-order logic and automated theorem proving”, Springer-Verlag (New-York 1990)

Objetivo: Mecanizar el razonamiento

Ejemplo: **Robot (agente basado en el conocimiento) dotado de un brazo mecánico que intenta levantar un objeto.**

El robot tiene el **conocimiento general**:

» Regla: "Si la batería está cargada y el objeto es portátil (su peso no es excesivo, no está atornillado o anclado en el suelo, etc.), entonces el objeto se desplaza al accionar el brazo mecánico"

El robot tiene mecanismos (por ejemplo sensores, estados internos, etc.) mediante los que puede **determinar directamente**

» Si la batería está cargada o no.

» Si el brazo ha sido accionado o no.

» Si, tras haber accionado el brazo mecánico, el objeto se ha desplazado o no.

Situación concreta (situación 1):

El robot determina que su batería está cargada, pero que, tras haber accionado el brazo mecánico, el objeto no se ha desplazado.

El robot llega a la conclusión:

"el objeto no es portátil"

Robot en la situación 1

¿Sobre qué se habla?

A: "El brazo mecánico ha sido accionado"

B: "La batería está cargada"

D: "El objeto se desplaza"

P: "El objeto es portátil"

Proposiciones atómicas (su valor de verdad – "Verdadero" o "Falso") sólo se puede determinar por contraste con la situación concreta en el mundo real.

¿Qué sabe el robot?

- "**Si** la **batería está cargada y el objeto es portátil, entonces**, **el objeto se desplaza al accionar el brazo mecánico** ".

  w_1 : $(A \wedge B \wedge P) \Rightarrow D$ ["Si A y B y P, entonces D"]

- "**El brazo ha sido accionado**"

  w_2 : **A** ["A"]

- **"La batería está cargada"**

  w_3 : **B** ["B"]

- **"El objeto no se ha desplazado"**

  w_4 : $\neg D$ ["No D"]

¿Qué concluye el robot? w : $\neg$ P ["No P"]

Robot en la situación 2

Otra situación concreta (situación 2):

Al robot del ejemplo anterior se le ha roto el sensor que permite determinar si su batería está cargada. El sensor de movimiento le indica que, tras haber accionado el brazo mecánico, el objeto no se ha desplazado.

El robot llega a la conclusión:

"O la batería está descargada o el objeto no es portátil (o las dos cosas a la vez)"

¿Qué sabe el robot?

- "**Si** la **batería está cargada** **y** **el objeto es portátil,** **entonces**, **el objeto se desplaza** **al accionar el brazo mecánico** ".

  w_1 : $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \wedge \mathbf{P}) \Rightarrow \mathbf{D}$ ["Si A y B y P, entonces D"]

- **"El brazo ha sido accionado"**

  w_2 : $\mathbf{A}$ ["A"]

- **"El objeto no se ha desplazado"**

  w_3 : $\neg \mathbf{D}$ ["No D"]

¿Qué concluye el robot?

w : $\neg \mathbf{B} \vee \neg \mathbf{P}$ ["No B o no P"]

Agente basado en el conocimiento

Un agente basado en el conocimiento debe contar con

» <u>**Base de conocimiento:**</u> Conjunto de Fórmulas Bien Formadas (FBFs) que representan aserciones verdaderas sobre la situación en la que se encuentra el agente en el mundo real.

» **Un mecanismo que le permita determinar el valor de verdad de proposiciones:**

- Conocimiento innato (ej. reglas, restricciones)
- Sensores que permitan determinar directamente el valor de verdad de una proposición.

» **Un mecanismo de consulta** que le permita acceso al conocimiento almacenado en base de conocimiento.

» **Un mecanismo de inferencia correcto** que le permita deducir nuevas FBFs a partir de las que ya posee e incorporarlas a la base de conocimiento.

Si las FBFs de la base de conocimiento tienen valor de verdad "*Verdadero (V)*" en la situación en el mundo real en la que se encuentra el agente, las FBFs derivadas mediante reglas de inferencia correctas por el agente también tienen valor de verdad "*Verdadero*" en dicha situación.

» **Un mecanismo de inferencia completo**

deseable, pero no imprescindible

[Gödel: no siempre es posible]

El juego de la lógica

Deducción (Inferencia)

Base de conocimiento (Conjunto de FBF's) $\longrightarrow$ Base de conocimiento ampliada

Representación [Mundo de la lógica]

[Mundo real] Semántica Semántica

Proposiciones sobre el mundo real

Proposiciones sobre el mundo real

¡Olvida el significado!

- Considera la lógica como un juego con reglas bien definidas.
- Para poder jugar hay que conocer y aplicar correctamente las reglas.

AVISO PARA JUGADORES: cuando los humanos intentamos hacer razonamientos en lógica formal, es fácil (y a menudo induce a error) hacer trampa y utilizar razonamientos informales, basados en el significado.

Proposiciones

- **Proposición:** Sentencia declarativa sobre algún aspecto del mundo real que tiene un valor de verdad definido (o bien es verdadera o bien es falsa).
  - » **Proposición atómica:** Proposición cuyo valor de verdad sólo puede determinarse por contraste directo con el mundo real.

    ”La batería está cargada”
  - » **Proposición compuesta (no atómica):**
    - – Proposición formada por proposiciones atómicas articuladas mediante conectores lógicos.
    - – Su valor de verdad se puede establecer a partir del valor de verdad de las proposiciones atómicas de las que se compone y de las tablas de verdad de los conectores lógicos.

    “Si la batería está cargada y el objeto es portátil, entonces el objeto se desplaza al accionar el brazo mecánico “.

NO SON PROPOSICIONES

“¿Está cargada la batería?” [no declarativa]

“Acciona el brazo mecánico” [no declarativa]

“Esta frase es falsa” [sin valor de verdad definido]

Base de conocimiento

- **Base de conocimiento:** Conjunto de proposiciones que describen una situación concreta en el mundo real

  El agente incluye en su base de conocimiento FBFs correspondientes a proposiciones que tiene valor de verdad "Verdadero" en la situación en el mundo real en la que se encuentra.

  » **Base de conocimiento del robot en situación 1:**

  Proposición 1: "Si la batería está cargada y el objeto es portátil, entonces, el objeto se desplaza al accionar el brazo mecánico ".

  Proposición 2: "El brazo ha sido accionado"

  Proposición 3: "La batería está cargada"

  Proposición 4: "El objeto no se ha desplazado"

  » **Base de conocimiento del robot en la situación 2 (sensor de batería roto):**

  Proposición 1: "Si la batería está cargada y el objeto es portátil, entonces, el objeto se desplaza al accionar el brazo mecánico ".

  Proposición 2: "El brazo ha sido accionado"

  Proposición 3: "El objeto no se ha desplazado"

Representación simbólica: átomos

- **Átomos**
  - » **Átomos literales:** `V` (Verdadero) **,** `F` (Falso)
  - » **Átomos simbólicos**

    Símbolos que representan proposiciones atómicas.

    La **denotación** de un átomo simbólico es la proposición en lenguaje natural a la que el átomo hace referencia.

Átomos necesarios para describir el mundo del robot:

Átomo simbólico	Denotación
A	"El brazo mecánico ha sido accionado"
B	"La batería está cargada"
D	"El objeto se desplaza"
P	"El objeto es portátil"

Representación simbólica: conectores lógicos

- **Conectores lógicos:**
  - » Permiten articular proposiciones atómicas para formar proposiciones compuestas.
  - » El valor de verdad de una proposición compuesta formada por proposiciones atómicas articuladas mediante un conector lógico se define mediante una **tabla de verdad** específica para dicho conector.
  - » Tipos de conectores
    - – Unarios: $\neg$ (“no”)

      $\neg$**D** [“El objeto no se desplaza”]
    - – n-arios: $\wedge$ (“y”), $\vee$ (“o”)

      A $\wedge$ **B** $\wedge$ **P**

      [“El brazo mecánico ha sido accionado, la batería está cargada, y el objeto es portátil”]
    - – binarios: $\Rightarrow$ (“implica”), $\Leftrightarrow$ (“si y sólo si”)

      (**A** $\wedge$ **B** $\wedge$ **P**) $\Rightarrow$ **D**

      [“Si el brazo mecánico ha sido accionado, la batería está cargada, y el objeto es portátil, entonces el objeto se mueve”]

Los elementos de la lógica

- **Un lenguaje formal**: Símbolos + reglas sintácticas que permiten combinar los símbolos en frases gramaticalmente correctas (FBF: fórmulas bien formadas).

  $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \wedge \mathbf{P}) \Rightarrow \mathbf{D}$

  es una FBF, es decir, una frase gramaticalmente correcta en la lógica proposicional.

- **Semántica**: Asociación entre FBFs en el lenguaje formal y frases en lenguaje natural sobre el dominio del que se está hablando.

- **Regla de inferencia:** Reglas tipográficas (es decir reglas que únicamente manipulan símbolos; por lo tanto, no están basadas en el significado) que nos permiten generar nuevas FBFs a partir de un conjunto de FBFs dado.

  Ej. $\{\mathbf{R},\ \mathbf{R} \Rightarrow \mathbf{S}\} \vdash_{\mathit{MODUS\ PONENS}} \mathbf{S}$

Lenguajes

- **Elementos del lenguaje**
  - » Sintaxis (forma)
  - » Semántica (significado)
- **Tipos de lenguaje**
  - » Lenguaje natural
    - – Medio de comunicación habitual entre humanos.
    - – Su sintaxis es difícil de sistematizar.

    Ej. Castellano, gallego, inglés
  - » Lenguaje formal
    - – Sintaxis con reglas bien definidas.

    Ej. Lenguajes de programación
    (LISP, ADA, PROLOG, Java, HTML, XML)
    - – Lógica proposicional, lógica de predicados
- **Gramática de un lenguaje**

  Conjunto de reglas que permiten

  (i) Determinar si una frase es correcta

  (ii) Generar frases correctas desde el punto de vista sintáctico dentro de ese lenguaje.

Gramáticas

- Un subconjunto del castellano puede ser generado mediante la siguiente gramática en **forma de Backus-Naur**

  » <Frase> → <Sintagma nominal> <Sintagma verbal>
  » <S. nominal> → <artículo> <adjetivo> <nombre> | <artículo> <nombre>
  » <S. verbal> → <verbo> <adverbio> | <verbo>
  » <artículo> → un | el
  » <adjetivo> → gran | hambriento
  » <nombre> → conejo | matemático
  » <verbo> → come | salta | razona
  » <adverbio> → alegremente | lógicamente

FRASES GRAMATICALMENTE CORRECTAS
"El gran conejo salta"
"El conejo come alegremente"
"Un hambriento matemático salta lógicamente"

El lenguaje de la lógica proposicional

- **Átomos**: `V ,F`
  `P,Q,P1,P2,P3,...,Pn,...`

- **Paréntesis:** (,)

- **Conectores lógicos:**
  $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ (por orden de precedencia)

- **Fómulas bien formadas (FBFs** o **frases)**
  - » **Un átomo es una FBF.**
  - » Si w_1 y w_2 son FBFs, también lo son las expresiones

    $\neg w_1$ **[negación de w_1]**

    $(w_1 \wedge w_2)$ **[conjunción entre w_1 y w_2]**

    $(w_1 \vee w_2)$ **[disyunción entre w_1 y w_2]**

    $(w_1 \Rightarrow w_2)$ **[implicación, condicional, regla**
    w_1 es la premisa o el antecedente,
    w_2 es la conclusión, o el consecuente**]**

    $(w_1 \Leftrightarrow w_2)$ **[bicondicional, si-y-sólo si]**

Gramática de la lógica proposicional

En forma de Backus-Naur

» < FBF> → < FBF atómica> | <FBF compuesta>

» < FBF atómica> → V|F| <Símbolo>

» <Símbolo> → P|Q|P1|P2|P3|...|Pn,...

» <FBF compuesta> → ¬ <FBF>
| (<FBF> ∧ <FBF>)
| (<FBF> ∨ <FBF>)
| (<FBF> ⇒ <FBF>)
| (<FBF> ⇔ <FBF>)

Paréntesis

- El lenguaje formal especificado es muy estricto con los paréntesis.
- En algunas expresiones, haremos uso de las reglas de asociatividad y de precedencia entre los conectores y no los pondremos explícitamente.
- Sólo utilizaremos paréntesis para especificar un orden de evaluación específico o para facilitar la comprensión de las fórmulas.

Ejemplos: $((P \land Q) \Rightarrow \neg P)$, o $P \land Q \Rightarrow \neg P$

$(P \Rightarrow \neg P)$, o $P \Rightarrow \neg P$

$((P \lor P) \Rightarrow \neg P)$, o $P \lor P \Rightarrow \neg P$

Tablas de verdad: conector "no"

$\neg w_1$: "No w_1"

$\neg w_1$ tiene el valor ***Verdadero*** si w_1 tiene el valor ***Falso.***

$\neg w_1$ tiene el valor ***Falso*** si w_1 tiene el valor ***Verdadero.***

w_1		$\neg w_1$
Verdadero		***Falso***
Falso		***Verdadero***

Ejemplo:

D "El objeto se desplaza"

¬D "El objeto **no** se desplaza"

Tablas de verdad: conector "y"

$\mathbf{w_1 \wedge w_2}$: "$\mathbf{w_1}$ **y** $\mathbf{w_2}$"

$\mathbf{w_1 \wedge w_2}$ tiene el valor ***Verdadero*** únicamente si tanto $\mathbf{w_1}$ como $\mathbf{w_2}$ tienen el valor ***Verdadero.***

En caso contrario tiene el valor ***Falso.***

$\mathbf{w_1}$	$\mathbf{w_2}$		$\mathbf{w_1 \wedge w_2}$
Verdadero	***Verdadero***		***Verdadero***
Verdadero	***Falso***		***Falso***
Falso	***Verdadero***		***Falso***
Falso	***Falso***		***Falso***

Ejemplo:

A: "El brazo mecánico ha sido accionado"

P: "El objeto es portátil"

A $\wedge$ P: "El brazo mecánico ha sido accionado **y** el objeto es portátil"

Tablas de verdad: conector "o"

$\mathbf{w}_1 \vee \mathbf{w}_2$: "$\mathbf{w}_1$ **o** $\mathbf{w}_2$"

$\mathbf{w}_1 \vee \mathbf{w}_2$ tiene el valor ***Verdadero*** si al menos una de las FBFs $\mathbf{w}_1$ o $\mathbf{w}_2$ tiene el valor ***Verdadero.***

En caso contrario tiene el valor ***Falso.***

$\mathbf{w}_1$	$\mathbf{w}_2$		$\mathbf{w}_1 \vee \mathbf{w}_2$
Verdadero	***Verdadero***		***Verdadero***
Verdadero	***Falso***		***Verdadero***
Falso	***Verdadero***		***Verdadero***
Falso	***Falso***		***Falso***

Ejemplo:

¬ P : "El objeto **no** es portátil"

¬ B : "La batería **no** está cargada"

¬ P ∨ ¬ B: "El objeto **no** es portátil **o** la batería **no** está cargada (o ambos a la vez)"

Tablas de verdad: conector “implica”

$w_1 \Rightarrow w_2$: “w_1 implica w_2“, “Si w_1, entonces w_2“

$w_1 \Rightarrow w_2$ tiene el mismo valor de verdad que **($\neg w_1 \vee w_2$)**

w_1	w_2		$w_1 \Rightarrow w_2$
Verdadero	*Verdadero*		*Verdadero*
Verdadero	*Falso*		*Falso*
Falso	*Verdadero*		*Verdadero*
Falso	*Falso*		*Verdadero*

Ejemplo:

A ∧ **B** ∧ **P**: “El brazo mecánico ha sido accionado, la batería está cargada, y el objeto es portátil”

D: ”El objeto se mueve”

(**A** ∧ **B** ∧ **P**) ⇒ **D**: ”Si el brazo mecánico ha sido accionado, la batería está cargada, y el objeto es portátil, entonces el objeto se mueve”

Tablas de verdad: conector “si y sólo si”

$w_1 \Leftrightarrow w_2$: “si y solo si w_1, entonces w_2“

$w_1 \Leftrightarrow w_2$ tiene el mismo valor de verdad q. $(w_1 \Rightarrow w_2) \wedge (w_2 \Rightarrow w_1)$

w_1	w_2		$w_1 \Leftrightarrow w_2$
Verdadero	*Verdadero*		*Verdadero*
Verdadero	*Falso*		*Falso*
Falso	*Verdadero*		*Falso*
Falso	*Falso*		*Verdadero*

Ejemplo:

A $\wedge$ **B** $\wedge$ **P**: “El brazo mecánico ha sido accionado, la batería está cargada, y el objeto es portátil”

D: ”el objeto se mueve”

(**A** $\wedge$ **B** $\wedge$ **P**) $\Leftrightarrow$ **D**: ”el objeto se mueve si y sólo si el brazo mecánico ha sido accionado, la batería está cargada, y el objeto es portátil”

Tablas de verdad: resumen

w_1	w_2		$\neg w_1$	$w_1 \wedge w_2$	$w_1 \vee w_2$	$w_1 \Rightarrow w_2$	$w_1 \Leftrightarrow w_2$
V	V		F	V	V	V	V
V	F		F	F	V	F	F
F	V		V	F	V	V	F
F	F		V	F	F	V	V

Equivalencia

Dos **FBFs distintas** $\mathbf{w_1}$, $\mathbf{w_2}$ son **equivalentes** ($\mathbf{w_1 \equiv w_2}$) cuando tienen la **misma tabla de verdad**

- **Elemento neutro:** $(w_1 \wedge V) \equiv w_1$; $(w_1 \vee F) \equiv w_1$
- **Leyes de absorción:** $(w_1 \vee (w_1 \wedge w_2)) \equiv w_1$
  $(w_1 \wedge (w_1 \vee w_2)) \equiv w_1$
- **Ley de contradicción / ley del medio excluido:**
  $(w_1 \wedge \neg w_1) \equiv F$; $(w_1 \vee \neg w_1) \equiv V$
- **Leyes de dominación:**
  $(w_1 \wedge F) \equiv F$; $(w_1 \vee V) \equiv V$
- **Idempotencia:** $(w_1 \wedge w_1) \equiv w_1$; $(w_1 \vee w_1) \equiv w_1$
- **Eliminación de la doble negación:** $\neg\neg w_1 \equiv w_1$
- **Leyes de De Morgan:**
  $\neg(w_1 \vee w_2) \equiv \neg w_1 \wedge \neg w_2$; $\neg(w_1 \wedge w_2) \equiv \neg w_1 \vee \neg w_2$
- **Conmutatividad:** $w_1 \vee w_2 \equiv w_2 \vee w_1$; $w_1 \wedge w_2 \equiv w_2 \wedge w_1$
- **Leyes asociativas:**
  $(w_1 \wedge w_2) \wedge w_3 \equiv w_1 \wedge (w_2 \wedge w_3) \equiv w_1 \wedge w_2 \wedge w_3$ [conjunción]
  $(w_1 \vee w_2) \vee w_3 \equiv w_1 \vee (w_2 \vee w_3) \equiv w_1 \vee w_2 \vee w_3$ [disyunción]
- **Leyes distributivas:**
  $w_1 \wedge (w_2 \vee w_3) \equiv (w_1 \wedge w_2) \vee (w_1 \wedge w_3)$
  $w_1 \vee (w_2 \wedge w_3) \equiv (w_1 \vee w_2) \wedge (w_1 \vee w_3)$.
- **Definición de condicional:** $w_1 \Rightarrow w_2 \equiv \neg w_1 \vee w_2$
- **Contraposición:** $w_1 \Rightarrow w_2 \equiv \neg w_2 \Rightarrow \neg w_1$
- **Def. de bicondicional:** $w_1 \Leftrightarrow w_2 \equiv (w_1 \Rightarrow w_2) \wedge (w_2 \Rightarrow w_1)$
  $\equiv (w_1 \wedge w_2) \vee (\neg w_1 \wedge \neg w_2)$

Interpretaciones / modelos

- **Interpretación:** Una interpretación es una asignación de valores de verdad ("Verdadero" o "Falso") a los átomos involucrados en las FBFs de una base de conocimiento.
  - » Para una base de conocimiento cuyas FBFs involucran n átomos simbólicos distintos, el número de interpretaciones diferentes posibles es 2^n

- **Modelo:** Una interpretación es un modelo de una base de conocimiento dada, si todas las FBFs de la base de conocimiento tienen el valor de verdad "Verdadero" para esa interpretación.

Base de conocimiento del robot (situación 1)

» "Si la batería está cargada y el objeto es portátil, entonces, el objeto se desplaza al accionar el brazo mecánico ".

$w_1 : (A \wedge B \wedge P) \Rightarrow D$

» "El brazo ha sido accionado" $w_2 :$ A

» "La batería está cargada" $w_3 :$ B

» "El objeto no se ha desplazado" $w_4 : \neg D$

	Átomos				Base de conocimiento del robot			
	A	B	D	P	$w_1 : (A \wedge B \wedge P) \Rightarrow D$	$w_2 : A$	$w_3 : B$	$w_4 : \neg D$
I_1	V	V	V	V	V	V	V	F
I_2	V	V	V	F	V	V	V	F
I_3	V	V	F	V	F	V	V	V
I_4	V	V	F	F	V	V	V	V
I_5	V	F	V	V	V	V	F	F
I_6	V	F	V	F	V	V	F	F
I_7	V	F	F	V	V	V	F	V
I_8	V	F	F	F	V	V	F	V
I_9	F	V	V	V	V	F	V	F
I_{10}	F	V	V	F	V	F	V	F
I_{11}	F	V	F	V	V	F	V	V
I_{12}	F	V	F	F	V	F	V	V
I_{13}	F	F	V	V	V	F	F	F
I_{14}	F	F	V	F	V	F	F	F
I_{15}	F	F	F	V	V	F	F	V
I_{16}	F	F	F	F	V	F	F	V

Satisfacibilidad

- **Satisfacible (SAT):** Una base de conocimiento es satisfacible si existe al menos una interpretación que sea modelo de dicha base de conocimiento.

  Ejemplo: $\{P, P \Rightarrow Q\}$ es SAT

- **Insatisfacible (UNSAT):** Una base de conocimiento es insatisfacible (contradicción) si no hay ninguna interpretación que sea modelo de dicha base de conocimiento.

  Ejemplos: $\{F\}$ es UNSAT

  $\{F, P \Rightarrow Q\}$ es UNSAT

  $\{P, \neg P\}$ es UNSAT

  $\{P \wedge \neg P\}$ es UNSAT

  $\{\neg Q, P \Rightarrow Q, P\}$ es UNSAT

- **Tautología:** Una FBF es una tautología si todas las interpretaciones son modelo de dicha FBF.

  Ejemplos: $\{V\}$ es TAUTOLOGÍA

  $\{P \vee \neg P\}$ es TAUTOLOGÍA

  $\{P \Rightarrow P\}$ es TAUTOLOGÍA

  $\{P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)\}$ es TAUTOLOGÍA

Nota: los conceptos introducidos pueden aplicarse a conjuntos de FBFs o a FBFs individuales.

Razonamiento mediante tablas de verdad

- La FBF `w` es consecuencia lógica de la base de conocimiento Δ si `w` tiene valor de verdad "Verdadero" para todas las interpretaciones que son modelo de Δ

$$\Delta \models w$$

Ejemplo 1: $\{P\} \models P$

Ejemplo 2: $\{P, P \Rightarrow Q\} \models Q$

Ejemplo 3: $\{F\} \models w$

(w cualquier FBF)

- **Comprobación de modelos**: Para determinar si **w es consecuencia lógica** de Δ ($\Delta \models w$), se construyen las **tablas de verdad** correspondientes y se comprueba si todos los modelos de Δ son también modelos de `w`.

Razonamiento mediante tablas de verdad: situación 1

- » n = 4 átomos
- » 2^4 = 16 interpretaciones (posibles situaciones alternativas)
- » 1 modelo (I_4) ➔ La base de conocimiento **Δ** es SAT
- » Podemos incluir **w = ¬ P** en la base de conocimiento manteniendo I_4 como modelo.

	Átomos					**Base de conocimiento Δ**					**w**
	A	**B**	**D**	**P**		**(A∧B∧P)⇒D**	**A**	**B**	**¬ D**		**¬ P**
I_1	**V**	**V**	**V**	**V**		**V**	**V**	**V**	**F**		
I_2	**V**	**V**	**V**	**F**		**V**	**V**	**V**	**F**		
I_3	**V**	**V**	**F**	**V**		**F**	**V**	**V**	**V**		
I_4	**V**	**V**	**F**	**F**		**V**	**V**	**V**	**V**		**V**
I_5	**V**	**F**	**V**	**V**		**V**	**V**	**F**	**F**		
I_6	**V**	**F**	**V**	**F**		**V**	**V**	**F**	**F**		
I_7	**V**	**F**	**F**	**V**		**V**	**V**	**F**	**V**		
I_8	**V**	**F**	**F**	**F**		**V**	**V**	**F**	**V**		
I_9	**F**	**V**	**V**	**V**		**V**	**F**	**V**	**F**		
I_{10}	**F**	**V**	**V**	**F**		**V**	**F**	**V**	**F**		
I_{11}	**F**	**V**	**F**	**V**		**V**	**F**	**V**	**V**		
I_{12}	**F**	**V**	**F**	**F**		**V**	**F**	**V**	**V**		
I_{13}	**F**	**F**	**V**	**V**		**V**	**F**	**F**	**F**		
I_{14}	**F**	**F**	**V**	**F**		**V**	**F**	**F**	**F**		
I_{15}	**F**	**F**	**F**	**V**		**V**	**F**	**F**	**V**		
I_{16}	**F**	**F**	**F**	**F**		**V**	**F**	**F**	**V**		

Base de conocimiento del robot (situación 2)

» "Si la batería está cargada y el objeto es portátil, entonces, el objeto se desplaza al accionar el brazo mecánico ".

$w_1: A \wedge B \wedge P \Rightarrow D$

» "El brazo ha sido accionado" $w_2: A$

» "El objeto no se ha desplazado" $w_3: \neg D$

	Átomos					Base de conocimiento del robot		
	A	B	D	P		$w_1: (A \wedge B \wedge P) \Rightarrow D$	$w_2: A$	$w_3: \neg D$
I_1	V	V	V	V		V	V	F
I_2	V	V	V	F		V	V	F
I_3	V	V	F	V		F	V	V
I_4	V	V	F	F		V	V	V
I_5	V	F	V	V		V	V	F
I_6	V	F	V	F		V	V	F
I_7	V	F	F	V		V	V	V
I_8	V	F	F	F		V	V	V
I_9	F	V	V	V		V	F	F
I_{10}	F	V	V	F		V	F	F
I_{11}	F	V	F	V		V	F	V
I_{12}	F	V	F	F		V	F	V
I_{13}	F	F	V	V		V	F	F
I_{14}	F	F	V	F		V	F	F
I_{15}	F	F	F	V		V	F	V
I_{16}	F	F	F	F		V	F	V

Razonamiento mediante tablas de verdad: situación 2

» n = 4 átomos

» 2^4 = 16 interpretaciones (posibles situaciones alternativas)

» 3 modelos (I_4, I_7, I_8) ➔ La base de conocimiento **Δ** es SAT

» Podemos incluir **w = ¬B∨¬P** en la base de conocimiento ya que los modelos de **Δ** (I_4, I_7, I_8) son también modelos de **w**.

	Átomos				**Base de conocimiento Δ**			**w**
	A	**B**	**D**	**P**	**(A∧B∧P)⇒D**	**A**	**¬ D**	**¬B∨¬P**
I_1	V	V	V	V	V	V	F	
I_2	V	V	V	F	V	V	F	
I_3	V	V	F	V	F	V	V	
I_4	V	V	F	F	V	V	V	V
I_5	V	F	V	V	V	V	F	
I_6	V	F	V	F	V	V	F	
I_7	V	F	F	V	V	V	V	V
I_8	V	F	F	F	V	V	V	V
I_9	F	V	V	V	V	F	F	
I_{10}	F	V	V	F	V	F	F	
I_{11}	F	V	F	V	V	F	V	
I_{12}	F	V	F	F	V	F	V	
I_{13}	F	F	V	V	V	F	F	
I_{14}	F	F	V	F	V	F	F	
I_{15}	F	F	F	V	V	F	V	
I_{16}	F	F	F	F	V	F	V	

Reglas de inferencia

- **Reglas de inferencia:** Reglas tipográficas que manipulan únicamente símbolos (y, que, por lo tanto, no utilizan el significado de estos símbolos, ni las tablas de verdad) y que nos permiten generar nuevas FBFs a partir de un conjunto de FBFs dado.
- **Reglas de inferencia correctas:** Reglas de inferencia en las que los modelos de conjunto de FBFs de partida son también modelos de las FBFs generadas.
- Las **reglas de equivalencia** son **reglas de inferencia correctas**. (Nota: no toda regla de inferencia lo es de equivalencia)

Conjunto de reglas de inferencia :

Sean w_1, w_2 dos FBFs

(1) *Modus ponens* : $\{w_1, w_1 \Rightarrow w_2\} \vdash_{M.P.} w_2$

(2) *Modus tollens*: $\{\neg w_2, w_1 \Rightarrow w_2\} \vdash_{M.T.} \neg w_1$

(3) Introducción de $\wedge$: $\{w_1, w_2\} \vdash_{\wedge\ INTRO} w_1 \wedge w_2$

(4) Conmutatividad de $\wedge$: $\{w_1 \wedge w_2\} \vdash_{\wedge\ CONMUTA} w_2 \wedge w_1$

(5) Eliminación de $\wedge$: $\{w_1 \wedge w_2\} \vdash_{\wedge\ ELIMIN} w_1$

(6) Introducción de $\vee$: $\{w_1\} \vdash_{\vee\ INTRO} w_1 \vee w_2$

$\{w_2\} \vdash_{\vee\ INTRO} w_1 \vee w_2$

(7) Eliminación de $\neg\neg$: $\{\neg\neg w_1\} \vdash_{\neg\neg ELIMIN} w_1$

Este conjunto de reglas de inferencia es correcto, pero no completo.

Razonamiento mediante inferencia

- **Prueba:** La secuencia de FBFs

  $\{w_1, w_2, ..., w_{n-1}, w_n\}$

  es una prueba (o deducción) de w_n a partir de un conjunto de FBFs Δ mediante el conjunto de reglas de inferencia *R* si y sólo si todas y cada una de las fórmulas $w_i, i=1,2,...,n$ o bien está en Δ o puede deducirse a partir de $\{w_1, w_2, ..., w_{i-1}\}$ mediante aplicación de alguna regla de inferencia en *R.*

- **Teorema**:

  w_n es un teorema de Δ con el conjunto de reglas de inferencia *R* si hay una prueba de w_n a partir de Δ mediante el conjunto de reglas de inferencia *R*

$$\Delta \vdash_R w_n$$

Razonamiento mediante inferencia (situación 1)

Base de conocimiento

» "Si la batería está cargada y el objeto es portátil, entonces, el objeto se desplaza al accionar el brazo mecánico ".

$w_1 : A \wedge B \wedge P \Rightarrow D$

» "El brazo ha sido accionado" $w_2 :\ A$

» "La batería está cargada" $w_3 :\ B$

» "El objeto no se ha desplazado" $w_4 :\ \neg D$

Inferencia

$\{A, B, \neg D\} \vdash_{\wedge INTRO} A \wedge B \wedge \neg D \quad [w_5]$

$(A \wedge B \wedge P) \Rightarrow D$

$\equiv \neg(A \wedge B \wedge P) \vee D$ [def. de $\Rightarrow$]

$\equiv \neg A \vee \neg B \vee \neg P \vee D$ [ley de De Morgan]

$\equiv \neg A \vee \neg B \vee \neg\neg D \vee \neg P$ [conmutativa + doble negación]

$\equiv \neg(A \wedge B \wedge \neg D) \vee \neg P$ [asociativa +ley de De Morgan]

$\equiv (A \wedge B \wedge \neg D) \Rightarrow \neg P$ [def. de $\Rightarrow$]

$\{(A \wedge B \wedge \neg D), (A \wedge B \wedge \neg D) \Rightarrow \neg P\} \vdash_{M.P.} \neg P$

» $\neg P$ es un teorema de la base de conocimiento del robot en la situación 1.

» Hemos encontrado una prueba de $\neg P$ ("el objeto no es portátil") a partir de la base de conocimiento que describe la situación 1 mediante inferencia.

Razonamiento mediante inferencia (situación 2)

Base de conocimiento

» "Si la batería está cargada y el objeto es portátil, entonces, el objeto se desplaza al accionar el brazo mecánico ".

$w_1 : A \wedge B \wedge P \Rightarrow D$

» "El brazo ha sido accionado" $w_2 : A$

» "El objeto no se ha desplazado" $w_3 : \neg D$

Inferencia

$\{A, \neg D\} \vdash_{\wedge INTRO} A \wedge \neg D$

$(A \wedge B \wedge P) \Rightarrow D$

$\equiv \neg(A \wedge B \wedge P) \vee D$ [def. de $\Rightarrow$]

$\equiv \neg A \vee \neg B \vee \neg P \vee D$ [ley de De Morgan]

$\equiv \neg A \vee \neg\neg D \vee \neg B \vee \neg P$ [conmutativa +doble negación]

$\equiv \neg(A \wedge \neg D) \vee \neg B \vee \neg P$ [asociativa + De Morgan]

$\equiv (A \wedge \neg D) \Rightarrow (\neg B \vee \neg P)$ [def. de $\Rightarrow$]

$\{(A \wedge \neg D), (A \wedge \neg D) \Rightarrow (\neg B \vee \neg P)\} \vdash_{M.P.} (\neg B \vee \neg P)$

» $(\neg B \vee \neg P)$ es un teorema de la base de conocimiento del robot en la situación 2.

» Hemos construido una prueba de $(\neg B \vee \neg P)$ ("La batería no está cargada o el objeto no es portátil") a partir de la base de conocimiento que describe la situación 2 mediante inferencia.

Corrección y completitud

- **Corrección**

  Se dice que el conjunto de reglas de inferencia R es correcto si para cualquier conjunto de FBFs Δ y FBF w

  $$\Delta \vdash_R w \quad \text{implica} \quad \Delta \models w$$

- **Completitud:**

  Se dice que el conjunto de reglas de inferencia R es completo si para cualquier conjunto de FBFs Δ y FBF w

  $$\Delta \models w \quad \text{implica} \quad \Delta \vdash_R w$$

- Determinar si **w es consecuencia lógica** de Δ ($\Delta \models w$)
  » **Comprobación de modelos**: Construir las **tablas de verdad** y comprobar si todos los modelos de Δ son también modelos de w.
  » Si disponemos de un conjunto de reglas de inferencia ***R* correcto y completo, podemos utilizar un procedimiento de búsqueda completo (e.g. búsqueda en anchura) para encontrar una prueba** $\Delta \vdash_R w$
    - Nodo: Base de conocimiento.
    - Nodos adyacentes: Base de conocimiento ampliada con FBFs obtenidas por aplicación de alguna regla de inferencia en R.

Trucos

- Las siguientes substituciones transforman la evaluación de los valores de verdad de una FBF en lógica proposicional en un problema aritmético

Lógica	Aritmética
F	0
V	1
$\wedge$	$\cdot$
$\vee$	$+$

- La notación $\overline{\mathrm{P}}$ se usa en algunos textos como alternativa a $\neg$P
- En los libros estadounidenses se usa $\supset$ en lugar de $\Rightarrow$
- Construcción de tablas de verdad

P	**$\Rightarrow$ [3]**	**((P**	**$\vee$ [1]**	**Q)**	**$\Leftrightarrow$ [2]**	**Q)**
F	**V**	F	F	F	V	F
F	**V**	F	V	V	V	V
V	**F**	V	V	F	F	F
V	**V**	V	V	V	V	V

Agente basado en el conocimiento

Un agente basado en el conocimiento debe contar con

» **Base de conocimiento:** Conjunto de Fórmulas Bien Formadas (FBFs) que representan aserciones verdaderas sobre la situación en la que se encuentra el agente en el mundo real.

» **Un mecanismo que le permita determinar el valor de verdad de proposiciones:**

- Conocimiento innato (ej. reglas, restricciones)
- Sensores que permitan determinar directamente el valor de verdad de una proposición.

» **Un mecanismo de consulta** que le permita acceso al conocimiento almacenado en base de conocimiento.

» **Un mecanismo de inferencia correcto** que le permita deducir nuevas FBFs e incorporarlas a la base de conocimiento.

Si las FBFs de la base de conocimiento tienen valor de verdad "*Verdadero (V)*" en la situación en el mundo real en la que se encuentra el agente, las FBFs derivadas mediante reglas de inferencia correctas por el agente también tienen valor de verdad "*Verdadero*" en dicha situación.

» **Un mecanismo de inferencia completo**

deseable, pero no imprescindible

[Gödel: no siempre es posible]

Metalingüística

Es importante no confundir:

- **Símbolos lingüísticos** que se utilizan para formar FBFs **de** la lógica proposicional:
  $\mathtt{V, F, P, Q, P1, P2\ldots, \vee, \wedge, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow}$
- **Símbolos meta-lingüísticos**, que se utilizan para hablar **sobre** la lógica proposicional:
  $\models$ (consecuencia lógica), $\vdash_{R}$ (inferencia)

Son diferentes:

- **Teoremas dentro de la** lógica proposicional: FBF generada mediante la aplicación de reglas de inferencia correctas a un conjunto de FBFs.
- **Meta-teorema:** Aseveraciones **acerca de** la lógica proposicional.

  Pregunta: La siguiente aserción (que es cierta)

  "Si $\Delta = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\} \models w$ entonces $(w_1 \wedge w_2 \wedge \ldots \wedge w_n) \Rightarrow w$ es una tautología"

  ¿es un teorema o un meta-teorema?

Formas de razonamiento automático

Dado un conjunto de FBFs $\Delta = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$ y una FBF w

¿Cómo demostrar $\Delta \models w$?

(i) Comprobando que los modelos de Δ son también modelos de w [**tablas de verdad**]

(ii) Demostrando que w es un teorema de Δ con el conjunto de reglas de inferencia correctas R

$$\Delta \vdash_R w$$ [**inferencia**]

(iii) Comprobando que la FBF $(w_1 \wedge w_2 \wedge ... \wedge w_n) \Rightarrow w$ es una tautología [**inferencia** / **tablas de verdad**]

(iv) Prueba por contradicción (reducción al absurdo, refutación)

Demostrar que el conjunto de FBFs que incluye las FBFs de Δ y la negación del objetivo ($\neg w$)

$\alpha = \{w_1, w_2, ..., w_n, \neg w\}$ es UNSAT

[**inferencia** / **tablas de verdad**]

Formas normales

- **Un literal** es o bien un átomo (literal positivo) o un átomo precedido por el conector ¬ (literal negativo).

  Ej. Literal positivo: P

  Literal negativo: ¬P
- **Cláusula**: Disyunción de literales

  Ej. P∨Q∨¬R
  - » **Cláusula unitaria**: Una cláusula que contiene un único literal. Ej. ¬R
  - » **Cláusula vacía**: Una cláusula que no contiene ningún literal .
    - – Se representa mediante el símbolo □.
    - – Su valor de verdad es F
- **Forma normal conjuntiva (FNC):** Una FBF que consiste en una conjunción de cláusulas (es decir una conjunción de disyunciones de literales) está en forma normal conjuntiva.
  - » **Metateorema:** Hay un algoritmo que transforma cualquier FBF de la lógica proposicional en una FNC equivalente.
- **Forma normal disyuntiva (FND):** Una FBF que consiste en una disyunción de conjunciones de literales está en forma normal disyuntiva.
  - » **Metateorema (dual):** Hay un algoritmo que transforma cualquier FBF de la lógica proposicional en una FND equivalente.

Conversión a FNC

Algoritmo que transforma una FBF de la lógica proposicional en una FNC **equivalente:**

1. **Eliminar las dobles implicaciones**

$$w_1 \Leftrightarrow w_2 \equiv (w_1 \Rightarrow w_2) \wedge (w_2 \Rightarrow w_1)$$

2. **Eliminar las implicaciones**

$$w_1 \Rightarrow w_2 \equiv \neg w_1 \vee w_2$$

3. **Reducir el ámbito de la negación**
   » Leyes de De Morgan
   » Eliminación de la doble negación

   Estas reglas se aplican de manera recursiva hasta que todos los conectores $\neg$ aparecen inmediatamente antes de átomos

4. Convertir a FNC utilizando las **leyes asociativas y las distributivas.**

5. Simplificar las expresiones resultantes utilizando **reglas de equivalencia (idempotencia, absorción, etc.)**.

Ejemplo: Conversión a FNC, I

- **Convertir** a una FNC **equivalente** la FBF

  $((P \Leftrightarrow Q) \Rightarrow (R \Rightarrow S)) \wedge (Q \Rightarrow \neg(P \wedge R))$

  1. Eliminación de la doble implicación

     $(((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)) \Rightarrow (R \Rightarrow S)) \wedge (Q \Rightarrow \neg(P \wedge R))$

  2. Eliminación de la implicación

     $(\neg((\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)) \vee (\neg R \vee S)) \wedge (\neg Q \vee \neg(P \wedge R))$

  3. Reducción del ámbito de la negación

     $((\neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee P)) \vee (\neg R \vee S)) \wedge (\neg Q \vee \neg P \vee \neg R)$

     $(((\neg\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg\neg Q \wedge \neg P))) \vee (\neg R \vee S)) \wedge (\neg Q \vee \neg P \vee \neg R)$

     $(((P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg P) \vee (\neg R \vee S))) \wedge (\neg Q \vee \neg P \vee \neg R)$

  4. Applicación de leyes asociativas / distributivas

     $((P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg P) \vee (\neg R \vee S)) \wedge (\neg Q \vee \neg P \vee \neg R)$

     Consideremos $((P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg P) \vee \neg R \vee S)$:
     [matriz con las disyunciones implícitas entre filas
     Conjunciones implícitas entre los elementos de una misma fila]

     $P \quad \neg Q$ (generar a partir de esta matriz conjunciones de
     $Q \quad \neg P$ disyunciones, en las que, en cada disyunción
     $\neg R$ contiene un elemento de cada fila)
     S

     $(P \vee Q \vee \neg R \vee S) \wedge (P \vee \neg P \vee \neg R \vee S) \wedge (\neg Q \vee Q \vee \neg R \vee S) \wedge$
     $(\neg Q \vee \neg P \vee \neg R \vee S) \wedge (\neg Q \vee \neg P \vee \neg R)$

  4. Simplificar la expresión mediante reglas de equiv.

     $(P \vee Q \vee \neg R \vee S) \wedge (\neg Q \vee \neg P \vee \neg R \vee S) \wedge (\neg Q \vee \neg P \vee \neg R)$

Ejemplo: Conversión a FNC, II

- **Convertir** a una FNC **equivalente** la FBF

  $((P \Leftrightarrow Q) \Rightarrow (\neg R \wedge S)) \wedge (Q \Rightarrow \neg (P \wedge R))$

  1. Eliminación de la doble implicación

  $(((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)) \Rightarrow (\neg R \wedge S)) \wedge (Q \Rightarrow \neg (P \wedge R))$

  2. Eliminación de la implicación

  $(\neg ((\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)) \vee (\neg R \wedge S)) \wedge (\neg Q \vee \neg (P \wedge R))$

  2. Reducir el ámbito de $\neg$

  $((\neg (\neg P \vee Q) \vee \neg (\neg Q \vee P)) \vee (\neg R \wedge S)) \wedge (\neg Q \vee \neg P \vee \neg R)$

  $((\neg\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg\neg Q \wedge \neg P)) \vee (\neg R \wedge S)) \wedge (\neg Q \vee \neg P \vee \neg R)$

  $((P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg P)) \vee (\neg R \wedge S)) \wedge (\neg Q \vee \neg P \vee \neg R)$

  3. Aplicar leyes asociativas / distributivas

  $((P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg P) \vee (\neg R \wedge S)) \wedge (\neg Q \vee \neg P \vee \neg R)$

P	$\neg Q$	(generar a partir de esta matriz una
Q	$\neg P$	conjunción con 8 cláusulas. Cada cláusula
$\neg R$	S	disyuntiva tiene un elemento de cada fila)

  $(P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee Q \vee S) \wedge (P \vee \neg P \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg P \vee S) \wedge$
  $(\neg Q \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg Q \vee Q \vee S) \wedge (\neg Q \vee \neg P \vee \neg R) \wedge (\neg Q \vee \neg P \vee S) \wedge$
  $(\neg Q \vee \neg P \vee \neg R)$

  4. Simplificar la expresión mediante reglas de equiv.

  $(P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee Q \vee S) \wedge (\neg Q \vee \neg P \vee \neg R) \wedge (\neg Q \vee \neg P \vee S)$

Razonamiento con FNC

Notación

K_n : Cláusula n-ésima

λ_i : Literal i-ésimo

- **Cláusulas**
  - » **La cláusula vacía (□) es UNSAT**.
  - » **Una cláusula no vacía siempre es SAT**.
  - » **Una cláusula es tautología sí y solo sí tiene la forma K = ($\lambda_1 \vee \neg\lambda_1 \vee \lambda_2 \ldots \vee \lambda_i$), donde λ_1 es un literal positivo**.

- **FNCs**
  - » **Una FNC vacía es una tautología**
  - » **Una FNC no vacía ($K_1 \wedge K_2 \wedge \ldots \wedge K_n$) es tautología** si y sólo si todas y cada una de las cláusulas de la que se compone es tautología.
  - » **Una FNC ($K_1 \wedge K_2 \wedge \ldots \wedge K_n \wedge$ □) que contiene la cláusula vacía es UNSAT**.
  - » Hay FNCs UNSAT que no contienen la cláusula vacía.

Simplificación de FNCs

- Por conmutatividad y asociatividad de los conectores $\wedge$ y $\vee$ no es necesario especificar el orden de los literales en una cláusula o de las cláusulas en una FNC.

  Ej. $(A \vee \neg B) \wedge (\neg B \vee C) \equiv (C \vee \neg B) \wedge (A \vee \neg B)$
- La FBF $(K_1 \wedge K_2 \wedge \ldots \wedge K_n)$ y el conjunto de FBFs $\{K_1, K_2, \ldots, K_n\}$ tienen los mismos modelos.

  Ej. $(A \vee \neg B) \wedge (\neg B \vee C) \equiv \{(A \vee \neg B), (\neg B \vee C)\}$
- Para simplificar una cláusula podemos eliminar los literales repetidos.

  Ej. $(A \vee \neg B \vee C \vee \neg B \vee C) \equiv (A \vee \neg B \vee C)$
- Para simplificar una FNC podemos eliminar
  - » las cláusulas repetidas

    Ej. $(A \vee \neg B) \wedge (A \vee \neg B) \equiv (A \vee \neg B)$
  - » las cláusulas que son tautología.

    Ej. $(A \vee \neg A) \wedge (A \vee \neg B) \equiv V \wedge (A \vee \neg B) \equiv (A \vee \neg B)$
  - » Las cláusulas subsumidas por otras (absorción)

    Ej. $(A \vee \neg B) \wedge (A \vee \neg B \vee C) \equiv (A \vee \neg B)$

A partir de este momento supondremos que hemos eliminado repeticiones y tautologías de la base de conocimiento en FNC.

Resolución entre cláusulas

- **Resolución** entre cláusulas

  Sea λ un literal positivo.
  Sean K_1 y K_2 dos cláusulas de la forma

  $K_1 = (\lambda \vee \lambda_{11} \vee \lambda_{21} \ldots \vee \lambda_{i1})$

  $K_2 = (\neg\lambda \vee \lambda_{12} \vee \lambda_{22} \ldots \vee \lambda_{j2})$,

  La derivación
  $\{K_1 , K_2 \} \vdash_{\texttt{[RES en } \lambda]} \lambda_{11} \vee \lambda_{21} \ldots \vee \lambda_{i1} \vee \lambda_{12} \vee \lambda_{22} \ldots \vee \lambda_{j2}$
  es una regla de inferencia correcta

  Ejemplos de resoluciones

  $\{\neg A \vee B, A\} \vdash_{\texttt{[RES en A]}} B$

  $\{\neg A \vee B \vee C, C \vee D \vee A\} \vdash_{\texttt{[RES en A]}} B \vee C \vee D$

  $\{\neg A \vee B \vee C, \neg C \vee A\} \vdash_{\texttt{[RES en A]}} B \vee C \vee \neg C \equiv V$

  $\{\neg A \vee B \vee C, \neg C \vee A\} \vdash_{\texttt{[RES en C]}} \neg A \vee B \vee A \equiv V$

  $\{\neg A, A\} \vdash_{\texttt{[RES en A]}} \equiv \square \equiv F$ (UNSAT!)

  $\square$ es la cláusula vacía (valor de verdad "Falso")

Resolución entre cláusulas es correcta

$K_1 = \lambda \vee \Sigma_1$, $\Sigma_1 = \lambda_{11} \vee \lambda_{21} \ldots \vee \lambda_{i1}$
$K_2 = \neg \lambda \vee \Sigma_2$, $\Sigma_2 = \lambda_{12} \vee \lambda_{22} \ldots \vee \lambda_{j2}$

$\{K_1 , K_2 \} \vdash_{[RES\ en\ \lambda]} (\Sigma_1 \vee \Sigma_2)$
implica
$\{K_1 , K_2 \} \models (\Sigma_1 \vee \Sigma_2)$

				$\Delta = \{K_1 , K_2\}$			w
λ	Σ_1	Σ_2		$\lambda \vee \Sigma_1$	$\neg\lambda \vee \Sigma_2$		$\Sigma_1 \vee \Sigma_2$
V	***V***	***V***		***V***	***V***		***V***
V	*V*	*F*		*V*	*F*		
V	***F***	***V***		***V***	***V***		***V***
V	*F*	*F*		*V*	*F*		
F	***V***	***V***		***V***	***V***		***V***
F	***V***	***F***		***V***	***V***		***V***
F	*F*	*V*		*F*	*V*		
F	*F*	*F*		*F*	*V*		

Resolution + refutación es completa

- **Resolución no es completa:**
  Hay FBFs que no se pueden obtener por resolución a partir de un conjunto de FBFs en FNC.

  Ejemplo: $\{P\} \models P \vee Q$

  no puede ser derivado mediante resolución a partir del conjunto de cláusulas $\{P\}$

  Sin embargo, por refutación

  $\Delta = \{P\}$

  $w = (P \vee Q)$; $\neg w = \neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$

  $\alpha = \{P, \neg(P \vee Q)\} \equiv \{P, \neg P, \neg Q\}$

  Haciendo resolución en P entre la primera y la segunda cláusulas de α

  $\{P, \neg P\} \vdash_{R[RES\ en\ P]} \square$ (cláusula vacía)

  concluimos que α es UNSAT, y que, por lo tanto

  $\{P\} \models (P \vee Q)$;

Resolución + refutación

Dado un conjunto de FBFs Δ, y una FBF **w**

1. Convertir las FBFs de Δ en un conjunto de cláusulas equivalente (transformar a FNC + eliminación de $\wedge$)

   $\Delta \equiv \Delta_{FNC}$

2. Convertir $\neg$**w** en un conjunto de cláusulas equivalente.

   $\neg w \equiv (\neg w)_{FNC}$

3. Combinar las cláusulas resultantes de pasos 1 y 2 en un conjunto único de cláusulas $\alpha_{FNC} \equiv \{\Delta_{FNC}, (\neg w)_{FNC}\}$

4. Repetir

   4.1 Eliminar las repeticiones y tautologías de α_{FNC}

   4.2 Realizar todas las posibles resoluciones en α_{FNC} añadiendo las cláusulas resultantes a α_{FNC}

   hasta que se genera la cláusula vacía

   α_{FNC} **es UNSAT, luego** $\Delta \models w$

   o hasta que no haya cláusulas nuevas

   α_{FNC} **es SAT, luego** $\Delta \not\models w$

Resolución es completo y decidible

- **Resolución en cláusulas + refutación es completa:** Si, como resultado de aplicar resolución + refutación a un conjunto de FBFs, Δ y a una FBF w se genera la cláusula vacía, entonces $\Delta \models w$.
- **El cálculo proposicional es decidible por resolución + refutación :** Sea un conjunto de FBFs Δ y una FBF w, tal que $\Delta \not\models w$, el procedimiento de resolución + refutación termina sin generar la cláusula vacía.

EJEMPLO 1:

$\Delta \equiv \{A \vee B,\ A \Rightarrow C\};\quad w \equiv C$

$\alpha_{FNC} \equiv \{A \vee B,\ \neg A \vee C,\ \neg C\}$

$\{A \vee B,\ \neg A \vee C\} \vdash_{[RES\ en\ A]} B \vee C$

$\{\neg C,\ \neg A \vee C\} \vdash_{[RES\ en\ C]} \neg A$

$\{\neg A,\ A \vee B\} \vdash_{[RES\ en\ A]} B$

α_{FNC} es SAT, luego $\Delta \not\models w$

EJEMPLO 2:

$\Delta \equiv \{A,\ (A \vee B) \Rightarrow C\};\quad w \equiv C$

$\alpha_{FNC} \equiv \{A,\ \neg A \vee C,\ \neg B \vee C,\ \neg C\}$

$\{\neg A \vee C,\ \neg C\} \vdash_{[RES\ en\ C]} \neg A$

$\{\neg A,\ A\} \vdash_{[RES\ en\ A]} \square$

α_{FNC} es UNSAT, luego $\Delta \models w$

Errores comunes

- A partir de la FBF $A \vee B$, no es posible obtener {A, B} por separado.

- Consideremos las cláusulas $\{\neg A \vee B \vee C,\ A \vee \neg B\}$

  Las únicas resoluciones posibles son tautologías

  $\neg B \vee B \vee C \equiv T$ [resolución sobre A]

  $\neg A \vee A \vee C \equiv T$ [resolución sobre B]

  No es correcto hacer resolución simultáneamente sobre 2 átomos (A y B) para obtener C.

- Consideremos la base de conocimiento Δ, y la FBF w
  - » Si w es consecuencia lógica de Δ, no se puede concluir que Δ tenga modelos (podría ser UNSAT)

    $\Delta \models w$ [Δ puede ser SAT o UNSAT]
  - » Si w no es consecuencia lógica de Δ, hay al menos un modelo para Δ (que no es modelo de w)

    $\Delta \not\models w$ [Δ es SAT]

Ejercicios (Nilsson, cap. 13)

- Mostrar mediante tablas de verdad la equivalencia $\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P \vee \neg Q)$

- Demostrar que si Δ, un conjunto de FBFs, es insatisfacible, entonces
  $$\Delta \models w, \text{ para cualquier FBF } w.$$

- Utilizando tablas de verdad, demostrar que *modus ponens* es una regla de inferencia correcta.

- Dado un conjunto de FBFs Δ y una FBF w
  todas estas alternativas son posibles

  S1: $\Delta \not\models w$ $\Delta \not\models \neg w$
  S2: $\Delta \models w$ $\Delta \not\models \neg w$
  S3: $\Delta \not\models w$ $\Delta \models \neg w$
  S4: $\Delta \models w$ $\Delta \models \neg w$ (Δ es UNSAT)